ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Μονάδες 7

Απόδειξη

Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Α2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

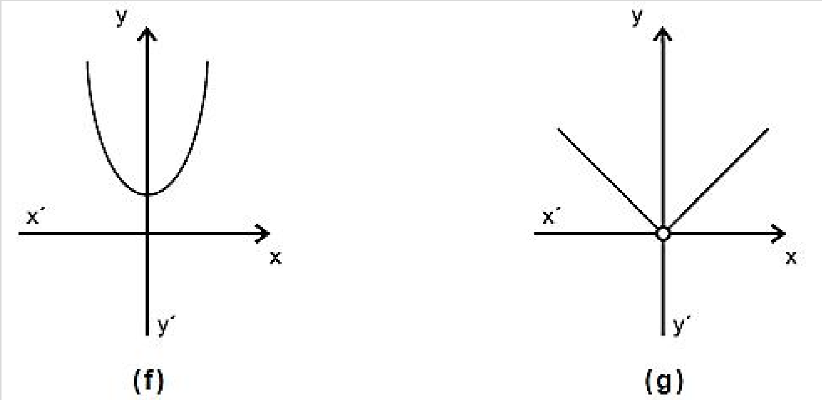
Μονάδες 4

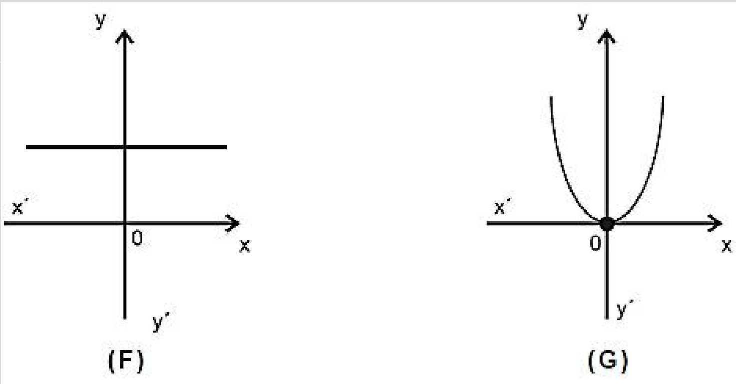
Απάντηση

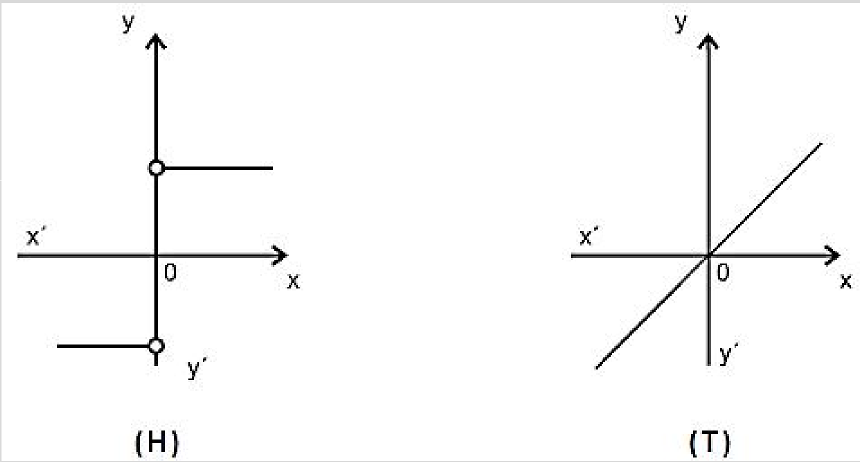
Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$. Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f:A\to\mathbb{R}$$
$$x\to f(x)$$

Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.







Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Απάντηση

Η παράγωγος της f είναι η T και της g η H.

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει

$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Απάντηση

α) Λ

β) Έστω $f(x)=\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=-\frac{1}{x^4}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ όμως

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^4}=-\infty$$

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ‘1-1’, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3] , τότε ορίζεται η $f\circ g$ με πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3] .

Μονάδες 6

Απάντηση

α) Σ β) Σ γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x}, & x>1\\ x^2+\alpha, & x\le 1\end{cases}$.

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=1$.

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

Λύση

Β1. Στο διάστημα $(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως ρητή. Στο διάστημα $(-\infty,1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της μόνο όταν είναι συνεχής και στο $x=1$, δηλαδή όταν $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha\Leftrightarrow 2=1+\alpha\Leftrightarrow \alpha=1$

Β2. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},4\right]$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$ με $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ με $f'(x)=2x$. Στο $x=1$ είναι:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x+1-2x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)}=-1,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$, οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},4\right)$, οπότε δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

B3. Πρέπει να υπάρχουν $x_0\in\mathbb{R}: f'(x_0)=-\frac{1}{4}$.

Αν $x_0>1$ τότε $f'(x_0)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_0^2=4\overset{x_0>1}{\Leftrightarrow}x_0=2$

Αν $x_0<1$ τότε $f'(x_0)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2x_0=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_0=-\frac{1}{8}$.

Είναι $f(2)=\frac{3}{2}$, $f\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{64}+1=\frac{65}{64}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=2$ έχει εξίσωση:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{4}{3}$$

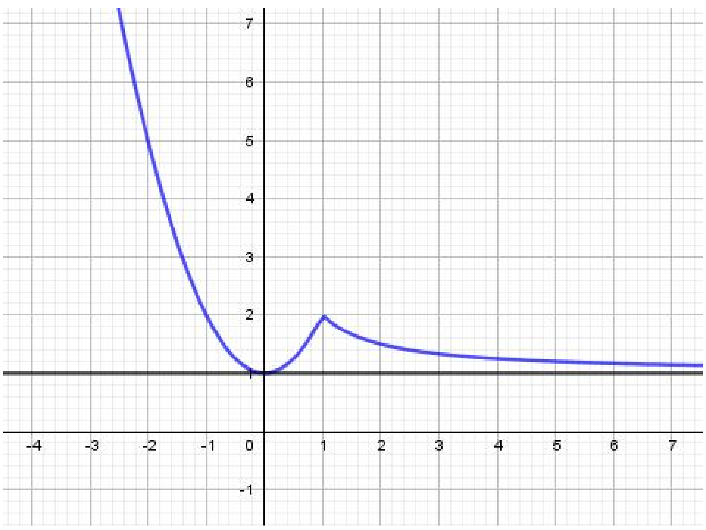
Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=-\frac{1}{8}$ έχει εξίσωση: $y-f\left(-\frac{1}{8}\right)=f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{63}{64}$

B4. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=1$ οπότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Η f στο $-\infty$ είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού και δεν έχει ασύμπτωτες.

Για $x>1: f(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ απορρίπτεται και για $x\le1: f(x)=0\Leftrightarrow x^2=-1$ αδύνατη, δηλαδή η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. Είναι $f(0)=1$ οπότε η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $(0,1)$.



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2\eta\mu x-x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0\in[0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0,f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx$

Μονάδες 8

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\cdot\ln x\right]$ (μονάδες 5)

Μονάδες 7

Λύση

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$.

$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\ge\dfrac{1}{2}\overset{x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow} x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$

Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$.

Η f έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(0)=0$ και $f(\pi)=-\pi$ και μέγιστο το $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$.

Επειδή για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ είναι $f(x)\le f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ και για κάθε $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$ είναι $f(x)\le f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, η f έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$.

Επειδή $f(\pi)<f(0)$ η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(\pi)=-\pi$.

Γ2. Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f''(x)=-2\eta\mu x$.

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f\frown[0,\pi]$. Επειδή η f είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, οπότε το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με κάθε εφαπτομένη της στο $[0,\pi]$, είναι το σημείο επαφής τους.

Γ3. $\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_0^{\pi}(2\eta\mu x-x)\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_0^{\pi}(\eta\mu 2x-x\sigma\upsilon\nu x)dx=\left[-\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x(\eta\mu x)'\,dx=$

$-[x\eta\mu x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\eta\mu x\,dx=[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=-2$

Γ4. α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{\eta\mu x}{x}-1\right)=2-1=1$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\cdot\ln x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-f(2x)}{x}(x\ln x)\right]=$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}-2\frac{f(2x)}{2x}\right)(x\ln x)\right]=(1-2)\cdot 0=0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{2x}\overset{2x=u}{=}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=1 \text{ και } \lim_{x\to 0}(x\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1)>\frac{x}{x+1}$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)>2^{f(x)}-1$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0$, όπου $0<\alpha<1$, έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μία στο διάστημα (0, 1) και μία στο διάστημα (1, 2).

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e)=e\ln 2$, να αποδείξετε ότι

$\ln 2<F(1)<\ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

Μονάδες 5

Λύση

Δ1. Έστω $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x,\ x\geq 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\ln(x+1)+1-1=\ln(x+1)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0\Leftrightarrow g(x)>g(0)\Leftrightarrow (x+1)\ln(x+1)-x>0\Leftrightarrow \ln(x+1)>\frac{x}{x+1}$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}<0\Rightarrow f\searrow(0,+\infty)$.

Είναι $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=1$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A)=(0,1)=A_{f^{-1}}$

Δ3. $f(x)>2^{f(x)}-1\Leftrightarrow f(x)+1>2^{f(x)}\overset{f(x)\in(0,1)}{\Leftrightarrow}\ln(f(x)+1)>f(x)\ln 2\Leftrightarrow\frac{\ln(f(x)+1)}{f(x)}>\ln 2\Leftrightarrow$

$f(f(x))>f(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<1$ ισχύει

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Δ4. $\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0\Leftrightarrow x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\pi\alpha)=0$

Έστω $h(x)=x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\pi\alpha),\ x\in[0,2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$h(0)=2\eta\mu(\pi\alpha)>0$ γιατί $0<\alpha<1\Leftrightarrow 0<\alpha\pi<\pi\Rightarrow \eta\mu(\alpha\pi)>0$

$h(1)=-f(\alpha)<0$ γιατί $0<f(x)<1$ για κάθε $x>0$.

$h(2)=2f^{-1}(\alpha)>0$ γιατί $f^{-1}(\alpha)>0$ αφού το σύνολο τιμών της αντίστροφης είναι το πεδίο ορισμού της f.

Είναι $h(0)h(1)<0,\ h(2)h(1)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)}{x-1}+\dfrac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\dfrac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,2)$. Όμως η εξίσωση $h(x)=0$ είναι $2^{ου}$ βαθμού και έχει το πολύ δύο ρίζες, άρα η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)}{x-1}+\dfrac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\dfrac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Δ5. Για κάθε $1\le x\le e \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(e)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow \dfrac{\ln(e+1)}{e}\le f(x)\le \ln 2$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[1,e]$, είναι:

$$\int_1^e \frac{\ln(e+1)}{e}dx<\int_1^e f(x)dx<\int_1^e \ln 2dx\Leftrightarrow \frac{\ln(e+1)}{e}(e-1)<\int_1^e f(x)dx<(e-1)\ln 2\Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(e+1)}{e}(e-1)<F(e)-F(1)<(e-1)\ln 2\Leftrightarrow \frac{\ln(e+1)}{e}(e-1)-e\ln 2<F(1)<(e-1)\ln 2-e\ln 2\Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(e+1)\cdot(e-1)-e^2\ln 2}{e}<-F(1)<-\ln 2\Leftrightarrow \ln 2<F(1)<\frac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}$$

Αρκεί $\dfrac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}<\ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)\Leftrightarrow \dfrac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}<(e+1)\ln 2-\ln(e+1)\Leftrightarrow$

$$e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)<e(e+1)\ln 2-e\ln(e+1)\Leftrightarrow$$

$$\cancel{e^2\ln 2}-\cancel{e\ln(e+1)}+\ln(e+1)<\cancel{e^2\ln 2}+e\ln 2-\cancel{e\ln(e+1)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(e+1)}{e}<\ln 2\Leftrightarrow f(e)<f(2)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} e>2$$ ισχύει